

BILANGAN DOMINASI DAN BILANGAN KEBEBASAN GRAF BIPARTIT KUBIK

Budi Santoso¹, Djuwandi², R. Heri Soelistyo U.³

^{1,2,3}Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Jl. Prof. H. Soedarto, S. H, Tembalang, Semarang

Abstract. Let a graph $G = (V, E)$, is a pair of sets V vertices and set E edges. Let D be a subset of V . If each vertex of $V - D$ is adjacent to atleast one vertex of D , then D is called a dominating set in G . The domination number of a graph G denoted as $\gamma(G)$ is the minimum cardinality of a dominating set in G . A set of vertices in a graph is said to be an independent set if no two vertices in the set are adjacent. the number of vertices in the largest independent set of a graph G is called the independence number and denoted by $\beta(G)$. In this final project, we consider the relation between independent set and dominating set of finite simple graphs. In particular, discuss them for some cubic bipartite graphs and find that the domination number $\gamma(G)$ is less than $1/3$ of the number of vertices and independence number $\beta(G)$ is half of the number of vertices.

Keywords: Dominating set, domination number, independent set, independence number, cubic bipartite graph.

1. PENDAHULUAN

Banyak yang dapat dipelajari dari suatu graf, salah satu diantaranya adalah himpunan dominasi dan himpunan kebebasan. Secara historis, masalah dominasi dipelajari dari tahun 1950 dan seterusnya, tetapi tingkat pengkajian tentang dominasi meningkat secara signifikan pada pertengahan 1970-an.

Suatu topik yang akan dikaji pada tulisan ini tentang dominasi dan kebebasan dari graf, khususnya ditentukan bilangan dominasi dan bilangan kebebasan dari graf bipartit kubik. Pada tulisan ini dibahas pula mengenai keterkaitan himpunan dominasi dengan himpunan kebebasan.

2. DOMINASI (DOMINATION) DAN KEBEBASAN (INDEPENDENCE) DARI GRAF

Definisi 2.1 [3] Diketahui graf $G = (V, E)$. Misalkan D merupakan subset dari V . Jika setiap titik dari $V - D$ saling adjacent sedikitnya dengan satu titik dari D , maka D dikatakan himpunan dominasi dalam graf G .

Definisi 2.2 [3] Bilangan dominasi (domination number) dinotasikan dengan

$\gamma(G)$ adalah kardinalitas terkecil dari sebuah himpunan dominasi.

Definisi 2.3 [3] Himpunan dominasi minimal adalah himpunan dominasi yang tidak ada titik yang dapat dihilangkan tanpa mengubah dominasinya.

Definisi 2.4 [3] Himpunan kebebasan (independent set) dari graf G adalah suatu himpunan titik – titik dengan tidak ada dua titik dalam himpunan yang saling berdekatan (adjacent).

Definisi 2.5 [3] Bilangan kebebasan (independence number) merupakan kardinalitas terbesar dari himpunan kebebasan dan dinotasikan dengan $\beta(G)$.

Definisi 2.6 [3] Himpunan kebebasan maksimal adalah himpunan kebebasan yang tidak ada titik lainnya dapat ditambahkan kedalamnya tanpa mengubah kebebasannya.

Teorema 2.7 [3] Sebuah himpunan kebebasan dari graf G dikatakan mendominasi jika hanya jika himpunan itu maksimal.

Bukti :

\Rightarrow Banyaknya sisi yang diperlukan sehingga G memiliki himpunan kebebasan sekaligus himpunan dominasi paling sedikit adalah $n - 1$, sedangkan

banyaknya sisi maksimal adalah C_n^2 . Dalam kasus ini banyaknya sisi maksimal terjadi pada graf lengkap. Dalam kasus ini, setiap himpunan dengan satu anggota (singleton set) akan bebas dan dominasi. Sehingga bilangan kebebasan dan bilangan dominasi adalah satu. Jika S tidak maksimal, sebuah titik dapat ditambahkan kedalamnya tanpa mengubah kebebasannya. Karena S adalah mendominasi, jika menambahkan satu titik ke dalam S maka akan mengubah kebebasannya. Oleh karena itu S harus maksimal.

⇐ Sebaliknya asumsikan bahwa himpunan kebebasan dari graf G adalah maksimal. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa graf G adalah himpunan dominasi. Jika himpunan kebebasan tidak mendominasi maka terdapat setidaknya satu titik yang bukan merupakan anggota himpunan atau tidak adjacent dengan sebarang titik dalam himpunan. Titik demikian dapat ditambahkan tanpa mengubah kebebasannya. Tetapi kontradiksi dengan himpunan kebebasan maksimal. Oleh karena itu himpunan itu adalah himpunan dominasi. ■

Teorema 2.8 [3] *Jika graf sederhana $G = (V, E)$ dengan n titik mempunyai sebuah titik dengan derajat $n - 1$, maka bilangan dominasi $\gamma(G)$ adalah satu.*

Bukti :

Diberikan graf sederhana $G = (V, E)$ dengan n titik. Misalkan v adalah titik dalam G dengan derajat $n - 1$, maka setiap titik lain adjacent dengan v sehingga $\{v\}$ adalah himpunan dominasi dari graf G , dengan bilangan dominasi $\gamma(G)$ satu. ■

Teorema 3.9 [3] *Jika graf $G = (V, E)$ adalah Graf lengkap (Complete Graph) maka $\gamma(G) = \beta(G)$.*

Bukti : Misalkan graf $G = (V, E)$ merupakan graf lengkap, yaitu graf dimana setiap titiknya terhubung ke titik yang lain. Oleh karena itu setiap titik adalah himpunan dominasi minimal dengan bilangan dominasi $\gamma(G) = 1$. Setiap titik merupakan himpunan dengan satu anggota

(singleton set) adalah himpunan kebebasan dengan bilangan kebebasan $\beta(G) = 1$. Dengan kata lain untuk graf lengkap $\gamma(G) = 1$ dan $\beta(G) = 1$. Sehingga $\gamma(G) = \beta(G)$. ■

Teorema 2.9 [3] *Dalam sebuah graf sederhana $G = (V, E)$ ketika sebuah sisi ditambahkan, banyaknya dari himpunan kebebasan maksimal menurun.*

Bukti :

Diketahui graf $G = (V, E)$ merupakan graf sederhana dengan n titik yaitu v_1, v_2, \dots, v_n . Misalkan S adalah himpunan dari semua himpunan kebebasan maksimal dari G . Bila terdapat dua titik v_i dan v_j yang tidak adjacent, maka v_i dan v_j akan berada dalam beberapa himpunan kebebasan. Sehingga, jika menghubungkan v_i dan v_j , himpunan tersebut tidak akan bebas. Oleh karena itu banyaknya dari himpunan kebebasan maksimal dalam S menurun ketika sebuah sisi ditambahkan didalamnya. ■

Akibat 2.10 [3] *Dalam sebuah Graf sederhana $G = (V, E)$, ketika sebuah sisi ditambahkan, banyaknya himpunan dominasi minimal akan menurun.*

Bukti :

Menurut Teorema 2.8 dalam sebuah Graf $G = (V, E)$ setiap himpunan kebebasan maksimal adalah himpunan dominasi. Pada himpunan ini, jelas bahwa setiap himpunan akan mendominasi minimal. Akibatnya menurut Teorema 2.9 banyaknya himpunan dominasi minimal menurun. ■

3. BILANGAN DOMINASI DAN BILANGAN KEBEBASAN GRAF BIPARTIT KUBIK

Definisi 3.1 [2] *Graf bipartite $G = (V, E)$ adalah graf yang himpunan titik V dapat dipisah menjadi dua himpunan titik V_a dan V_b sedemikian hingga setiap sisi $e \in E(G)$ menghubungkan titik di V_a dengan titik di V_b .*

Definisi 3.2 [2], [5] *Jika dalam graph bipartit $G = (V, E)$ terdapat sedikitnya*

dua titik yang dihubungkan secara langsung oleh lebih dari sebuah garis disebut multigraph bipartite.

Teorema 3.3 [2] Jika $G = (V, E)$ adalah graph bipartite dengan bipartisi (V_a, V_b) maka $\deg(V_a) = \sum \deg(V_b)$.

Bukti :

Dapat dilihat di [8] ■

Definisi 3.4 [2] Graf teratur (regular graph) adalah graf yang setiap titiknya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap titik adalah r , maka graf tersebut disebut graf teratur derajat r .

Definisi 3.5 [1], [4] Graf kubik (cubic graph) adalah graf reguler yang berderajat tiga.

Definisi 3.6 [2] Graf bipartite kubik $G = (V, E)$ adalah suatu graf yang himpunan titik V -nya dapat dipisah menjadi dua himpunan bebas V_a dan V_b sedemikian hingga setiap $e \in E$ menghubungkan titik di V_a dengan titik di V_b dan derajat setiap titik di dalam V adalah 3.

Teorema 3.7 [3] Bilangan dominasi $\gamma(G)$ dari graf bipartit kubik adalah kurang dari atau sama dengan $1/3$ dari jumlah titik.

Bukti :

Diberikan sebuah graf bipartit kubik dengan n titik. Himpunan titik dapat dipartisi menjadi dua himpunan dengan setiap himpunan terdiri dari $n/2$ titik. Karena graf adalah kubik, masing-masing titik berderajat 3. Jadi setiap titik di kedua himpunan akan berdekatan (adjacent) dengan 3 titik saja. Artinya, setiap titik mendominasi 3 titik. Jadi paling banyak $n/3$ titik akan cukup untuk mendominasi semua titik yang lain. Oleh karena itu bilangan dominasi akan kurang dari atau sama dengan $1/3$ dari jumlah titik. ■

Teorema 3.8 [5] Bilangan kebebasan $\beta(G)$ dari graf bipartit kubik adalah sama dengan $1/2$ dari jumlah titik.

Bukti :

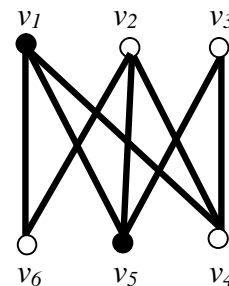
Diberikan sebuah graf bipartit kubik dengan n titik. Himpunan titik dapat dipartisi menjadi dua himpunan dengan setiap himpunan terdiri dari $n/2$ titik.

Setiap titik dalam sebuah himpunan titik yang dibagi menjadi dua himpunan tidak adjacent sehingga merupakan himpunan kebebasan. Jadi himpunan kebebasan terbesar (largest independents set) akan terdiri $n/2$ titik. Oleh karena itu bilangan kebebasan adalah $n/2$ dari jumlah titik. Jadi Untuk sebuah graf bipartit kubik bilangan kebebasan $\beta(G)$ adalah sama dengan $1/2$ dari jumlah titik. ■

Berikut ini dibahas penentuan bilangan dominasi dan bilangan kebebasan dari beberapa graf bipartite kubik.

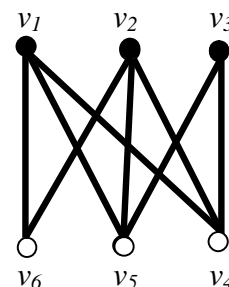
Contoh 3.8 Misalkan $G = (V, E)$ merupakan sebuah graf bipartite kubik dengan n titik. Diketahui bahwa jumlah minimum titik dari graf bipartit kubik adalah 6. Selain itu graf yang mempunyai jumlah titik ganjil tidak dapat dikatakan graf bipartit kubik. Selanjutnya akan dibahas graf bipartit kubik dimana $n = 6, 8, 10, 12, \dots$

1. Untuk $n = 6$, diberikan graf bipartit kubik sebagai berikut :



Gambar 1 Graf Bipartit Kubik 6 titik

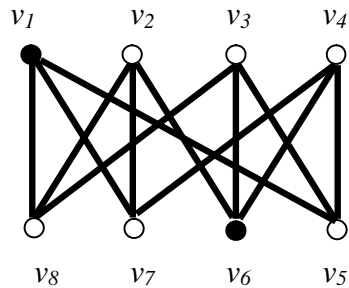
Himpunan titik $\{v_1, v_5\}$ merupakan himpunan dominasi dengan kardinalitas terkecil yaitu 2 sehingga bilangan dominasinya $\gamma(G) = 2 = 6/3 = n/3$. Sedangkan himpunan kebebasan dari graf bipartit kubik dengan 6 titik adalah sebagai berikut :



Gambar 2 Graf Bipartit Kubik 6 titik

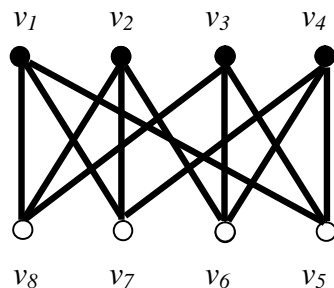
Himpunan kebebasan terbesar adalah $\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4, v_5, v_6\}$ dengan kardinalitasnya adalah 3 sehingga bilangan kebebasannya $\beta(G) = 3$. Himpunan kebebasan $\beta(G) = 3 = 6/2 = n/2$.

2. Untuk $n = 8$, diberikan graf bipartit kubik sebagai berikut :



Gambar 3 Graf Bipartit Kubik 8 titik

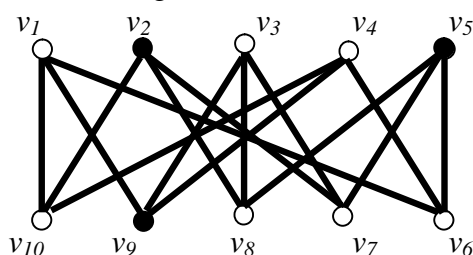
Himpunan titik $\{v_1, v_6\}$ merupakan himpunan dominasi dengan kardinalitas terkecil yaitu 2 sehingga bilangan dominasinya $\gamma(G) = 2 < 8/3 = n/3$. Sedangkan himpunan kebebasan dari graf bipartit kubik dengan 8 titik adalah sebagai berikut :



Gambar 4 Graf Bipartit Kubik 8 titik

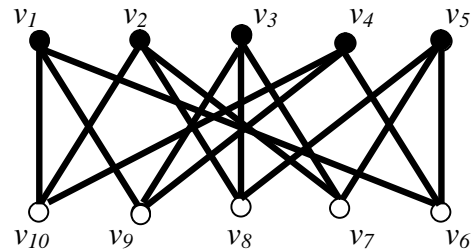
Himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $\{v_5, v_6, v_7, v_8\}$ merupakan himpunan kebebasan terbesar dengan kardinalitasnya adalah 4 sehingga bilangan kebebasan $\beta(G) = 4 = 8/2 = n/2$.

3. Untuk $n = 10$, diberikan graf bipartit kubik sebagai berikut :



Gambar 5 Graf Bipartit Kubik 10 titik

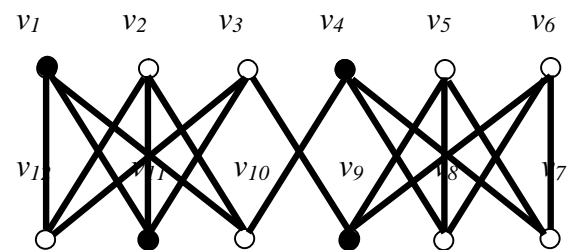
Himpunan titik $\{v_2, v_5, v_9\}$ merupakan himpunan dominasi dengan kardinalitas terkecil dari himpunan dominasi dengan kardinalitasnya adalah 3 sehingga bilangan dominasi $\gamma(G) = 3 < 10/3 = n/3$. Sedangkan himpunan kebebasan dari graf bipartit kubik dengan 10 titik adalah sebagai berikut :



Gambar 6 Graf Bipartit Kubik 10 titik

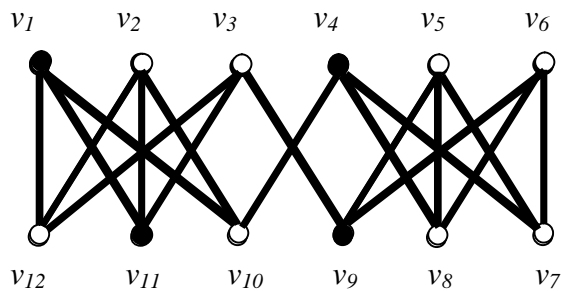
Himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $\{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ merupakan himpunan kebebasan terbesar dengan kardinalitasnya adalah 5 sehingga bilangan kebebasan $\beta(G) = 5 = 10/2 = n/2$.

4. Untuk $n = 12$, diberikan graf bipartit kubik sebagai berikut :



Gambar 7 Graf Bipartit Kubik 12 titik

Himpunan titik $\{v_1, v_4, v_9, v_{11}\}$ merupakan himpunan dominasi dengan kardinalitas terkecil dari himpunan dominasi dengan kardinalitasnya adalah 4 sehingga bilangan dominasi $\gamma(G) = 4 < 12/3 = n/3$. Sedangkan himpunan kebebasan dari graf bipartit kubik dengan 12 titik adalah sebagai berikut :



Gambar 8 Graf Bipartit Kubik 12 titik

Himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $\{v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$ merupakan himpunan kebebasan terbesar dengan kardinalitasnya adalah 6 sehingga bilangan kebebasan $\beta(G) = 5 = 12/2 = n/2$.

4. PENUTUP

Berdasarkan pembahasan yang sudah dilakukan, dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Bilangan dominasi dari graf bipartit kubik telah ditentukan, dengan bilangan dominasinya adalah kurang dari atau sama dengan $1/3$ dari jumlah titik.
2. Bilangan kebebasan dari graf bipartit kubik telah ditentukan, dengan bilangan kebebasannya adalah sama dengan $1/2$ dari jumlah titik.

3. Himpunan dominasi berkaitan erat dengan himpunan kebebasan yaitu himpunan kebebasan maksimal merupakan himpunan dominasi.
4. Sebuah himpunan kebebasan sekaligus mendominasi jika hanya jika himpunan itu maksimal.

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Harary, F., (1969), "*Graph Theory*", Philippines : Addison-Wesley company.
- [2] Hilton, A.J.W., Rodger. (1982), "*Edge Colouring Regular Bipartite Graphs*", Annals of Discrete Mathematics.
- [3] Murugesan, N., et al. (2009), *The Domination and Independence of Some Cubic Bipartite Graphs*. Int. J. Contemp. Math. Sciences. 6(13): 611-618.
- [4] Wilson, J. R., John J. W. (1990), *Graphs An Introductory Approach*. New York : University Course Graphs, Network, and Design.
- [5] Winarsih, S. (1994), "*Pewarnaan Garis Pada Multigraph Bipartite Skew Kubik*". Skripsi Jurusan Matematika Universitas Diponegoro, Semarang.